קיום קבוצה מקסימלית

משפט. בדרגה נל"ח נמצאת קבוצה מקסימלית אםם הדרגה היא גבוהה.

הוכחה. תהי A קבוצה מקסימלית. ראינו כי הפונקציה L_A המונה לפי הסדר את A^c היא דומיננטית, ולכן, כפי שהוכחנו הדרגה שלה גבוהה. כעת ניגש להוכחת הכוון ההפוך.

הגדרות. א. **פונקציה מגבילה** היא פונקציה חשיבה השואפת לאינסוף.

למשל, כל פונקציה חשיבה חד חד ערכית היא מגבילה.

ב. לפונקציה מגבילה F נגדיר פונקציה ν_F ע"י הקביעה ש-$\nu_F(n)$ הוא המספר s המזערי כך שלכל $t \geq s$ $F(t) > n$, כלומר כל הערכים של F שהם לכל היותר n מתקבלים לפני הארגומנט s. הפונקציות ν_F, עבור פונקציות מגבילות F נקראות **פונקציות הספק**.

תכונות פונקציות ההספק. א. כל פונקצית הספק היא עולה במובן החלש.

ב. אם F, G פונקציות מגבילות ואם לכל n $F(n) \leq G(n)$ אז לכל n $\nu_G(n) \leq \nu_F(n)$.

ג. כל פונקצית הספק היא מדרגה $\leq 0'$.

ד. לפונקצית הספק ν_F אם G היא פונקציה כך שלכל n $\nu_F(n) \leq G(n)$ אז ν_F חשיבה מ-G.

ה. לכל פונקציה מגבילה F, טווח F חשיב מפונקצית ההספק ν_F.

ו. לכל פונקציה מגבילה חד חד ערכית F פונקצית ההספק ν_F חשיבה מטווח F ולכן היא שוות דרגה לטווח F.

הוכחה. א. נובע ישירות מן ההגדרה.

ב. לכל $t \geq \nu_F(n)$ קיים $G(t) \geq F(t) > n$. מכיוון ש-$\nu_G(n)$ הוא ה-s המזערי כך שלכל $t \geq s$ קיים $G(t) > n$ ו- $\nu_F(n)$ הוא s כזה לכן $\nu_G(n) \leq \nu_F(n)$.

ג. $\nu_F(n) = \mu s(\forall k \geq s)(F(k) > n)$.

ד. $\nu_F(n) = \mu s(\forall k < G(n))(k \geq s \rightarrow F(k) > n)$.

ה. לפי הגדרת ν_F n נמצא בטווח F אםם $n = F(k)$ עבור $k < \nu_F(n)$, ולכן טווח F חשיב מ-ν_F.

ו. נחשב את $\nu_F(n)$ בעזרת אוב לטווח F. עבור n נתון נראה מהם המספרים מבין 0 עד n שהם בטווח F. כעת נחשב את $F(0), F(1), \ldots$ עד שנקבל את כל המספרים הללו, ואם האחרון מביניהם הוא $F(m)$ אז מכיוון ש-F חד חד ערכית הערכים שהם $\leq n$ לא יתקבלו עבור ארגומנטים גדולים מ-m ולכן $\nu_F(n) = m + 1$.

משפט 1. לכל פונקציה דומיננטית H מדרגה נל"ח $\leq 0'$ קיימת פונקצית הספק שוות דרגה לה שגם היא דומיננטית.

הוכחה. מכיוון שדרגת H $\leq 0'$ H היא גבול של $H_s(n)$ חשיבה עם מודולוס M (כלומר לכל $s \geq M(n)$ $H_s(n) = H(s)$) שהוא חשיב מ-H.

נגדיר $F(s) = (\mu n < s)(H_s(n) \neq H_{s+1}(n))$ אם יש n כזה, ו- $F(s) = s$ אחרת. ברור כי F חשיבה.

(i) לפי הגדרת F, אם $H_s(n) \neq H_{s+1}(n)$ אז $F(s) \leq n$.

(ii) אם $H_t(n) \neq H(n)$ אז מכיוון ש- $\lim s \rightarrow \infty H_s(n) = H(n)$ קיים $s \geq t$ כך ש- $H_s(n) \neq H_{s+1}(n)$, ולכן לפי (i) $F(s) \leq n$ ולכן $\nu_F(n) > s \geq t$.

נראה כי ν_F חשיבה מ-H. נגדיר $G(n) = \max\{n+1, M(i) \mid i \leq n\}$ ואז ל- $s \geq G(n)$ קיים לכל $i \leq n$ $H_s(i) = H(i) = H_{s+1}(i)$ ולכן $F(s) > n$. לכן לפי הגדרת ν_F קיים $\nu_F(n) \leq G(n)$. הוכחנו לעיל כי בתנאי זה ν_F חשיבה מ-G, ולפי הגדרת G G חשיבה מ-M שהיא חשיבה מ-H.

כעת נראה כי H חשיבה מ-ν_F. בהינתן n יהי $t = \nu_F(n)$. נראה כי $H(n) = H_t(n)$. אם אין הדבר כן אז לפי (ii) $\nu_F(n) > t$, בסתירה לאמור לעיל.

כעת נוכיח ש-ν_F דומיננטית. תהי J פונקציה חשיבה. אז גם הפונקציה $H_{J(n)}(n)$ היא חשיבה, ומכיוון ש-H דומיננטית אז לכל n מספיק גדול $H_{J(n)}(n) < H(n)$, ולפי (ii) $\nu_F(n) > J(n)$.

הגדרה. תהי A קבוצה נל"ח הנבנית ע"י חישוב בשלבים, ותהי F פונקציה מגבילה.

א. בניית A נקראת **מוגבלת F** אם כל מספר המוכנס ל-A בשלב s הוא $\leq F(s)$.

לכן מן השלב $\nu_F(n)$ ואילך מוכנסים ל-A רק מספרים הגדולים מ-n.

ב. בניית A נקראת **נתמכת F** אם בכל שלב s מוכנס ל-A מספר שהינו אחד מ-$F(s)$ המספרים הראשונים שאינם ב-A^s.

למה 2. אם F פונקציה מגבילה ובנית קבוצה נל"ח A מוגבלת F אז $A \leq_T \nu_F$.

הוכחה: כדי לדעת אם $n \in A$ די לעקוב אחר בנית A עד השלב $\nu_F(n)$.

למה 3. אם בניית A היא נתמכת F אז גם $A \leq_T \nu_F$, ולכן $A \equiv_T \nu_F$.

הוכחה: ניגש לחישוב $\nu_F(n)$. לאור הוכחת תכונה ג' של פונקציות ההספק די לנו למצוא t כך שעד $t-1$ מתקבלים כל ערכי F עד הערך n. מכיוון שבניית A נתמכת F מוכנס בשלב s אחד מ-$F(s)+1$ המספרים הראשונים שאינם ב-A^s ומספר זה הוא כמובן אחד מ-$F(s)+1$ המספרים הראשונים שאינם ב-A. מכיוון שהמשלים של A אינסופי נחשב באמצעות האוב של A את כל איברי A עד האיבר ה-$n{+}1$ שלא ב-A, ויהי t כך שכל האיברים הללו כבר ב-A^t. לכן מכיוון שבשלב $t \geq s$ נכנס ל-A אחד מ-$F(s)+1$ המספרים הראשונים שאינם ב-A ו-$n+1$ הראשונים ביניהם כבר נכנסו קודם לכן, לכן $F(s)+1 > n+1$ ו- $F(s) > n$. כך הוכנו כי $F(s) > n$ עבור $s \geq t$ ולכן t הוא כנדרש.